Correction du devoir surveillé $n°3$

Cours : C.f. exemple 3.13. /4

Exercice 1 :

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $(E) : y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x}$. /4

   Résolution de l'équation homogène $(E_H) : y' + \frac{1}{x}y = 0$:
   $\mathcal{S}_H(\mathbb{R}_+^*) = \{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Recherche d'une solution particulière de (E) : Soit $y_p : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$, où $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
   On a $y_p \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. De plus, $y_p' : x \mapsto \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2}$ d'où y_p sol. de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda'(x) = \cos(x)$.
   En posant $\lambda = \sin$, $y_p : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est solution de (E).
   Résolution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$: $\mathcal{S}_H(\mathbb{R}_+^*) = \{x \mapsto \frac{\lambda + \sin(x)}{x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   Sur $\mathbb{R}_-^*$, on a : $(E) : y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x}$.
   Résolution de l'équation homogène $(E_H) : y' + \frac{1}{x}y = 0$:
   $\mathcal{S}_H(\mathbb{R}_-^*) = \{x \mapsto \mu \mathrm{e}^{-\ln(-x)}, \mu \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Recherche d'une solution particulière de (E) : Soit $y_p : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$, où $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R})$.
   On a $y_p \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R})$. De plus, $y_p' : x \mapsto \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2}$ d'où y_p sol. de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \lambda'(x) = \cos(x)$.
   En posant $\lambda = \sin$, $y_p : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est solution de (E).
   Résolution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$: $\mathcal{S}_H(\mathbb{R}_-^*) = \{x \mapsto \frac{\lambda + \sin(x)}{x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos'(0) = 1$. Donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$. On notera encore f son prolongement. /1

   (b) En dressant le tableau de variation de $x \mapsto \sin(x) - x$, on vérifie facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) - x \leqslant 0$. Posons la fonction $g : x \mapsto \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}$ définie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction g est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g^{(3)} : x \mapsto -\cos(x) + 1$. Donc $g^{(3)} \geqslant 0$.
   Donc $g^{(2)}$ est croissante. De plus, $g^{(2)}(0) = 0$. Donc $g^{(2)} \geqslant 0$. /2
   Donc g' est croissante. De plus, $g'(0) = 1$. Donc $g' \geqslant 0$. Donc g est croissante. De plus, $g(0) = 0$.
   Donc $g \geqslant 0$. Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-\dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) - x \leqslant 0$.

   (c) La fonction $x \mapsto \sin(x) - x$ est impaire donc pour tout $x \in \mathbb{R}_-$: $0 \leqslant \sin(x) - x \leqslant -\dfrac{x^3}{6}$. /1

   (d) D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$. /1

   (e) On reconnaît ci-dessus les limites finies des taux d'accroissement à gauche et à droite de f.
   Donc f est dérivable en 0. /1

3. Les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda + \sin(x)}{x}$ admettent des limites finies en 0 si et seulement si $\lambda = 0$. /1

4.
$$y \text{ sol. de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \frac{\lambda_1 + \sin(x)}{x} \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \frac{\lambda_2 + \sin(x)}{x} \\ y \text{ dérivable en } 0. \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La seule fonction potentiellement solution du problème est la fonction sinus cardinal. Nous avons vérifié qu'elle était bien dérivable en 0. /1

Conclusion : y sol. de (E) sur $\mathbb{R} \iff y : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

Exercice 2 :

Méthode A : /2

D'après le théorème sur les suites récurrentes linéaire d'ordre 2, il existe des réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 2^n + \mu(-1)^n$. Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda - \mu \end{cases}$ i.e. $\lambda = -\mu = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode B :

1. En modifiant A en effectuant la transformation $L_1 \leftrightarrow L_3$ qui conserve l'inversibilité, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Or cette matrice est triangulaire inférieure avec un coefficient nul sur la diagonale donc non inversible. Conclusion : $A \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. /1

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. /1

3. Par récurrence, on montre facilement le résultat. /1

4. (a) Soit $B, C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. /1

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 2B - C \\ A^2 = 4B + C \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} B = \frac{1}{6}\left(A^2 + A\right) \\ C = \frac{1}{3}\left(A^2 - 2A\right) \end{array} \right. \iff B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) $B^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 24 & 12 & 12 \\ 12 & 6 & 6 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} = B$ et $C^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = C$.

   D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = B$ et $C^k = C$. /1

   (c) On a $BC = CB = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{C})}$. /1

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de Newton comme $2B$ et $-C$ commutent, $A^n = (2B - C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k B^k (-C)^{n-k} \underset{BC=0}{=} 2^n B^n + (-1)^n C^n = 2^n B + (-1)^n C$ /1

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^{n+2} & 2^{n+1} & 2^{n+1} \\ 2^{n+1} & 2^n & 2^n \\ 2^{n+1} & 2^n & 2^n \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1} - (-1)^{n+1} & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n-1} - (-1)^{n-1} & 2^{n-1} - (-1)^{n-1} \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n-1} - (-1)^{n-1} & 2^{n-1} - (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

   D'après la question 3, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$. De plus, la formule reste vraie en 0. /1